

Daugavpils Būvniecības tehnikums

Mācību priekšmeti
Ģeodēzijas pamati. Ģeodēzija

Specialitāte:
Arhitektūras tehniķis
1. un 2. kurss

Pretējais ģeodēziskais uzdevums plaknē

Metodiskā izstrādne

Profesionālās izglītības pedagogs: **Jānis Ancāns**

Daugavpils
2020

Saturs

Ievads	3
1. Sagatavošanās – koordinātu sistēmas ieviešana telpā, būvē	4
2. Attālumu aprēķins taisnleņķa koordinātu sistēmā	7
3. Virzienu orientēšana	9

Ievads

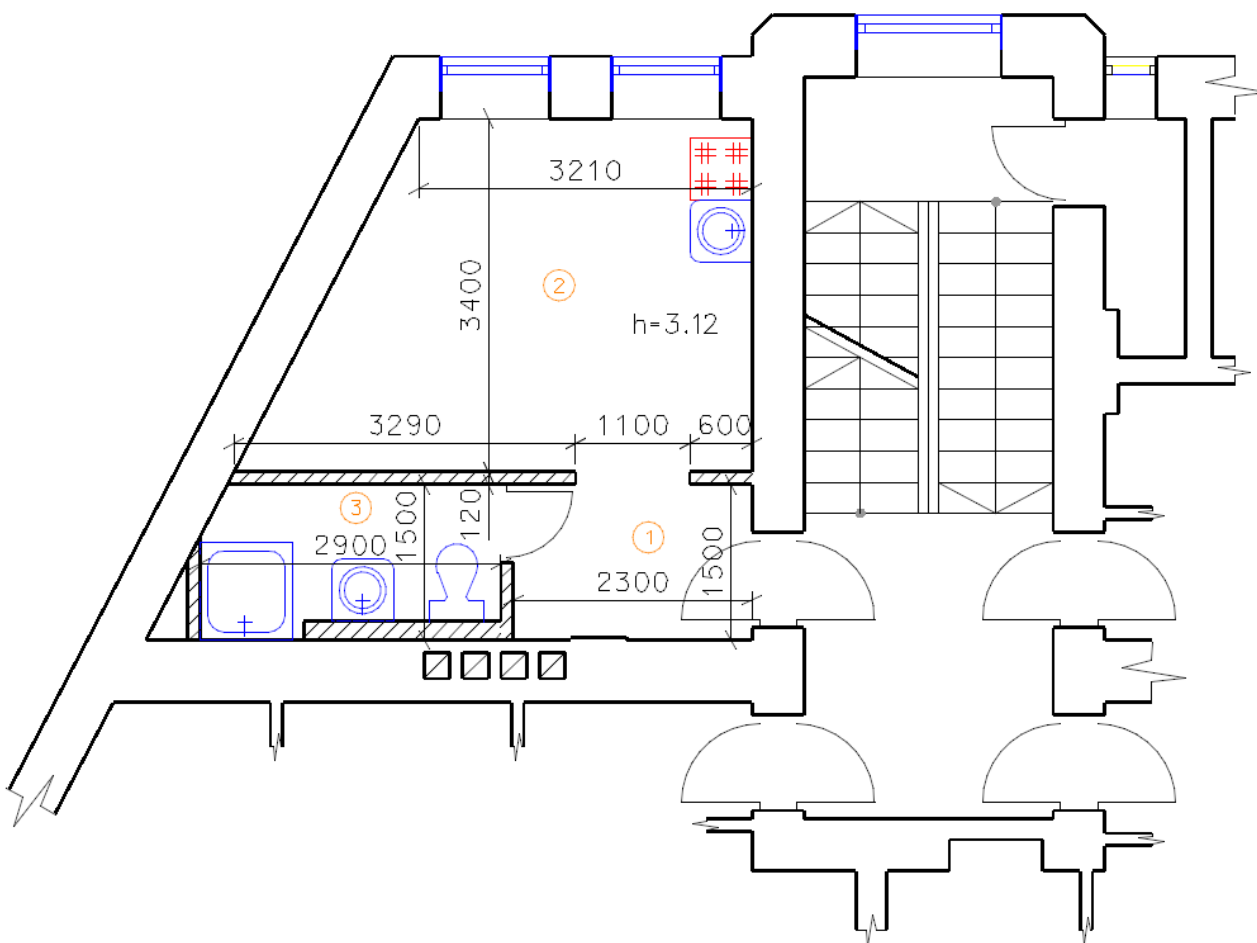
Šajā darbs ir saistošs visiem ģeodēzijā strādājošiem un šajā darbā aprakstītais aprēķins ir viens no biežāk veicamajiem aprēķiniem plaknē.

Tā kā plaknē ir veicami tikai divu veidu mērījumi – leņķi un attālumi, tad jau ģeometrijas pamatkursā ir zināmas sakarības, kā piemēram trijstūrī, kas ir pīspīplāšāk pīlietojamā figūra, no attālumiem aprēķināt leņķus, bet no leņķiem – attālumus. Tomēr ģeodēzijā nevienmēr būs ērti apvidu dalīt trīstūros un visu uzmērīto uzglabāt trīstūros. Tāpēc telpiskās informācijas uzglabāšanai un attēlošanai kopš Renē Dekarta (1596 – 1650) laikiem ļoti plāši tiek izmantotas taisnleņķa koordinātas. Tas paver iespējas vispārināt daudzu ģeodēzijas uzdevumu atrisināšanu. Vispārināšana nevienmēr nozīmē kaut ko padarīt vienkāršāk izdarāmu. Vispārināšana nozīmē virkni nelielu risinājumu, kas der visu vai ļoti daudzu uzdevumu atrisināšanai. Tāpēc ģeodēzijā telpiskās informācijas uzglabāšanai un uzdevumu risināšanai pīlieto koordinātas. Līdz ar to var teik, ka koordināta ģeodēzijā ir viss.

Tāpēc darbā doti skaidrojumi, norādījumi un piemēri, kā pēc punktu plaknes taisnleņķa koordinātām plaknē aprēķināt attālumus un virzienu leņķus, kuri turpmāk tiek izmantoti citu uzdevumu risināšanai.

1. Sagatavošanās – koordinātu sistēmas ieviešana telpā, būvē

Piemēram, ir šāds mini dzīvoklis, kuram uzmērīšana veicama telpā nr.2.

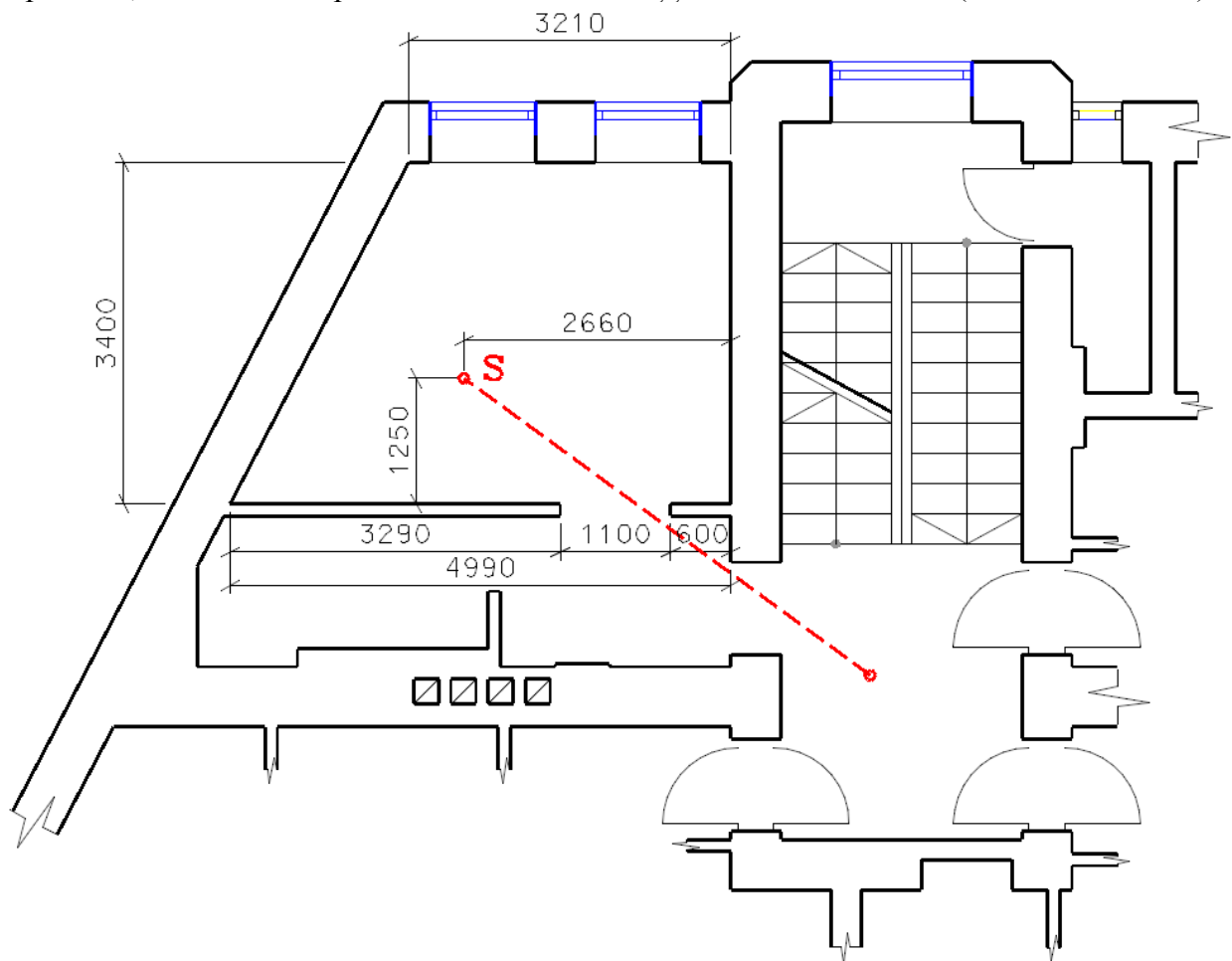


1. attēls. Dzīvokļa plāns

Ne jau viss te ir taisnos leņķos – viena siena ir slīpa, bet vairums sienu ir taisnos leņķos.

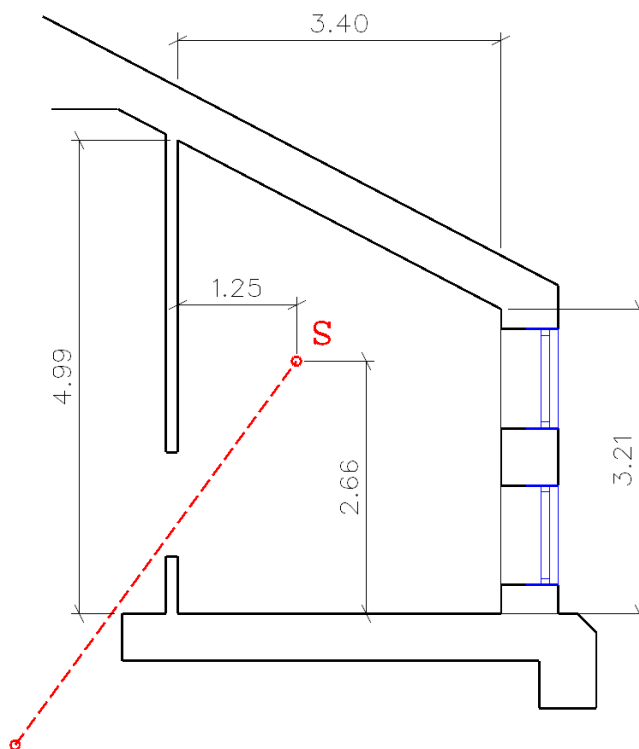
Pieņemsim, ka uzmērīšana ar teodolītu un mērlenti notiek, teodolītam atrodoties apmēram telpas vidū, punktā *S* – *stāvpunktā*. Stāvpunkta vietu labāk izvēlēties tā, lai no tā varētu redzēt visus uzmērāmos punktu: stūrus, ailas, citas detaļas... un arī no tā būtu ērti nostiept mērlenti. Dažreiz ir nepieciešams stāvpunktu sasaistīt ar kādu citu stāvpunktu, tāpēc stāvpunkta vieta parasti sanāk nedaudz pretīm durvīm, vai kā piemērā – lai caur divām durvīm ārpus dzīvokļa kāpņu laukumā butu redzams kāds cits iepriekšējais vai nākošais satāvpunkts.

Stāvpunktu telpā ieteicams nofiksēt atkārtotiem mērījumiem, iezīmējot ar krustiņu, iegravējot vai iedzenot naglu. Kā stāvpunktu var izmantot arī grīdā esošu naglu vai šuvi. Lai iezīmēto vai izvēlēto punktu nepazaudētu vai nesajauktu ar citu naglu, tam veic piesaisti pie sienām. Turpmāka uzdevuma veikšansi ieteicams veikt pret savā starpā perpendikulārām sienām – pret tām, caur kurām turpmāk būs ieviesta taisnleņķa koordinātu sistēma (skatīt attēlus tālāk).

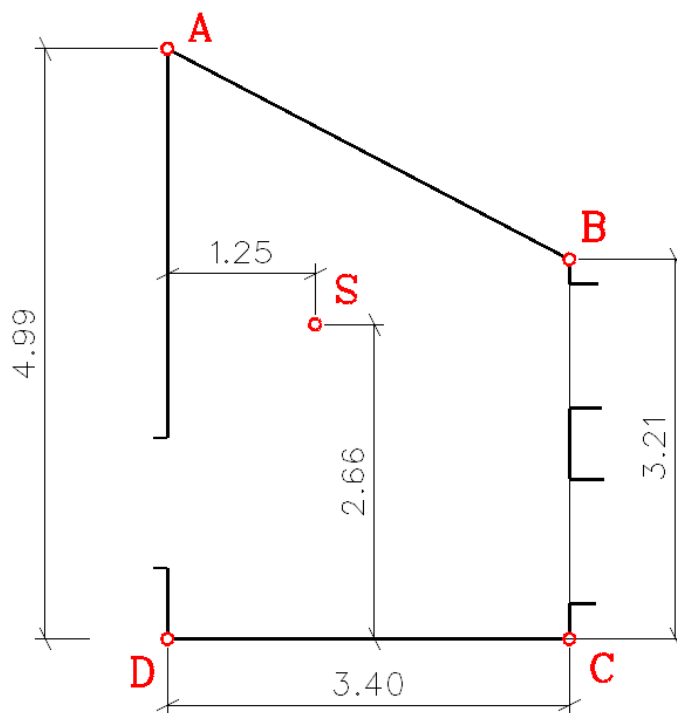


2. attēls. Izvēlētais stāvpunkts – punkts *S*.

Lai ērtāk rēķināt, atmetīšu no plāna visu lieko un pagrieziņu pānu.

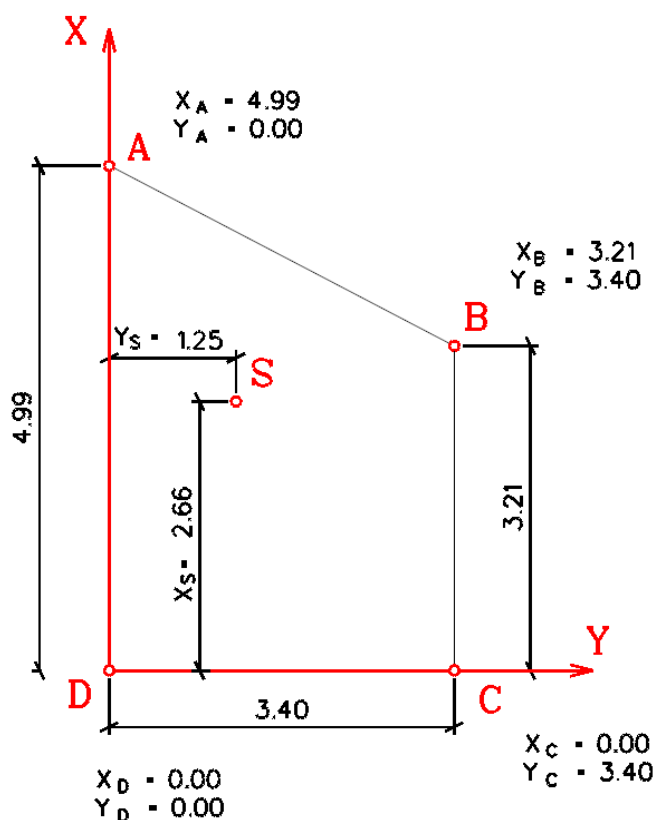


Un telpas stūrus apzīmēšu ar punktem *A*, *B*, *C* un *D*



3.attēls. Izvēlētie darba punkti *A*, *B*, *C*, *D*

Pa divām, savā starpā perpendikulārām (grākajām) sienām ieviešu taisnleņķa koordinātu sistēmu, kur X ass versta uz augšu, bet Y ass – pa labi (Ministru kabineta noteikumi Nr.879, punkts 8.3. <https://likumi.lv/ta/id/239759-geodeziskas-atskaites-sistemas-un-topografisko-karsu-sistemas-noteikumi>)



4. attēls Pieņemtā taisnleņķa koordinātu sistēma X,Y un darba punktu A, B, C, D koordinātas taisnleņķa koordinātu sistēmā

Stāvpunktam S nav jābūt precīzi vidū, jo vidus meklēšana un iezīmēšana ir papildus darbs. S punkts var atrasties 1 – 3 soļi attālumā no vidus.

Vadoties pēc telpas taisnleņķa uzmērījumiem, pierakstām šo punktu taisnleņķa koordinātas.

Arī stāvpunkta S koordinātas: $X_S = 2.66$ no Y ass uz augšu X ass pozitīvajā virzienā, bet $Y_S = 1.25$ no X ass pa labi Y ass pozitīvajā virzienā.

Punkts	X	Y
S	2.66	1.25
A	4.99	0.00
B	3.21	3.40
C	0.00	3.40
D	0.00	0.00

Uzmērot telpu pēc polārās metodes – mēra attālumus no stāvpunkta S līdz visiem citiem punktiem. Šoreiz tie būs jāaprēķina.

2. Attālumu aprēķins taisnleņķa koordinātu sistēmā

Kā var aprēķināt *horizontālo* attālumu starp punktiem plaknē, ja dotas punktu taisnleņķa koordinātas, var atrast analītiskās ģeometrijas kursā, vai:

https://lv.wikipedia.org/wiki/Dekarta_koordin%C4%81tu_sist%C4%93ma

vai

<https://ik-ptz.ru/lv/testy-ege---2014-po-literature/kak-uznat-rasstoyanie-mezhdu-tochkami-rasstoyanie-mezhdu-dvumya-tochkami-na.html>

Tas ir

$$|SA| = \sqrt{(X_A - X_S)^2 + (Y_A - Y_S)^2} \quad (1)$$

un tā tālāk arī B un C punktiem, līdz D

$$|SD| = \sqrt{(X_D - X_S)^2 + (Y_D - Y_S)^2}$$

Piemērs:

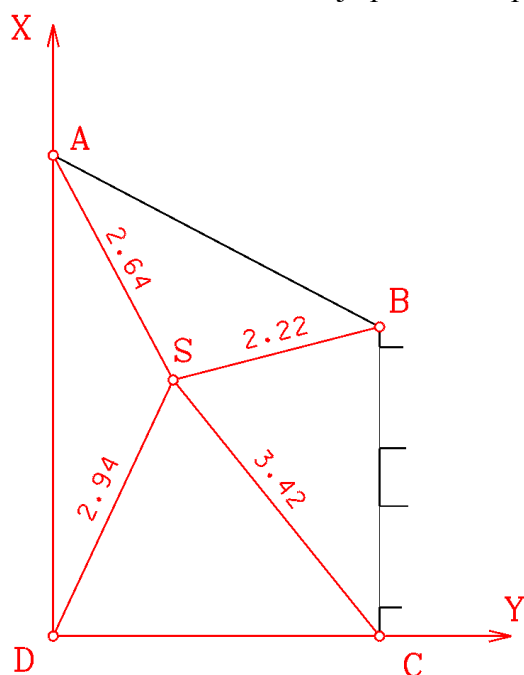
$$|SA| = \sqrt{(X_A - X_S)^2 + (Y_A - Y_S)^2} = \sqrt{(4.99 - 2.66)^2 + (0.00 - 1.25)^2} = \sqrt{2.33^2 + (-1.25)^2} = \sqrt{5.4289 + 1.5625} = \sqrt{6.9914} = 2.6441 \approx 2.64 \text{ m}$$

$$|SB| = \sqrt{(X_B - X_S)^2 + (Y_B - Y_S)^2} = \sqrt{(3.21 - 2.66)^2 + (3.40 - 1.25)^2} = \sqrt{0.55^2 + 2.15^2} = \sqrt{0.3025 + 4.6225} = \sqrt{4.9250} = 2.2192 \approx 2.22 \text{ m}$$

$$|SC| = \sqrt{(X_C - X_S)^2 + (Y_C - Y_S)^2} = \sqrt{(0.00 - 2.66)^2 + (3.40 - 1.25)^2} = \sqrt{(-2.66)^2 + 2.15^2} = \sqrt{7.0756 + 4.6225} = \sqrt{11.6981} = 3.4202 \approx 3.42 \text{ m}$$

$$|SD| = \sqrt{(X_D - X_S)^2 + (Y_D - Y_S)^2} = \sqrt{(0.00 - 2.66)^2 + (0.00 - 1.25)^2} = \sqrt{(-2.66)^2 + (-1.25)^2} = \sqrt{7.0756 + 1.5625} = \sqrt{8.6381} = 2.9391 \approx 2.94 \text{ m}$$

Uzzīmēt shēmu un tajā pierakstīt aprēķintos horizontālos attālumus



Piezīme.

Vjadzības gadījumā līdzīgā veidā ir iespējams aprēķināt arī **nemērītās** slīpās sienas garumu $|AB|$, vai jekuras diagonāles $|AC|$ vai $|DB|$ garumu:

$$|AB| = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

vai

$$|AC| = \sqrt{(X_C - X_A)^2 + (Y_C - Y_A)^2}$$

vai

$$|DB| = \sqrt{(X_B - X_D)^2 + (Y_B - Y_D)^2}$$

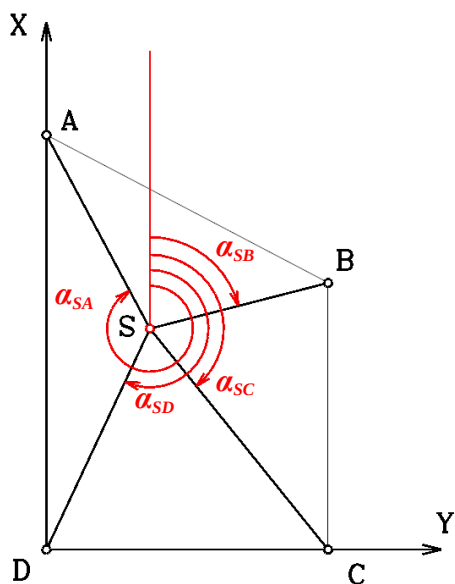
4. attēls. Shēma: attālumi no stāvpunkta S līdz darba punktiem A, B, C, D

Ja kurš prot rēķināt ar Excel, var rēķināt Excel vidē, Tad koordinātas un attālumu aprēķinu var ērti noformēt šādā tabulā (nav obligāti)

Punkts	X	Y	attālums
S	2.66	1.25	
A	4.99	0.00	2.64
B	3.21	3.40	2.22
C	0.00	3.40	3.42
D	0.00	0.00	2.94

Izmērīt attālumus uz vietas un salīdzināt ar aprēķinātajiem. Izmērītos attālumus pierakstīt shēmā zem aprēķinātajiem (zem līnijas).

3. Virzienu orientēšana



5.att. Direkcionalie leņķi

Nākošais uzdevums ir virzienu aprēķināšana no stāvpunkta līdz dotajiem darba punktiem A, B, C, D. Virziena leņķus taisnleņķa koordinātu plaknē sauc par direkcionalajiem leņķiem (angļu val. *direction* – virziens).

Par **direkcionalo leņķi** α sauc horizontālo leņķi, kuru skaita pulksteņa rādītāja kustības virzienā no ass meridināna vai tam paralēlas līnijas ziemeļu virziena jeb no koordinātu sistēmas x ass pozitīvā virziena līdz dotajam virzienam

Direkcionalie leņķi var būt no 0° līdz 360° .

Loti daudzās grāmatās direkcionalā leņķa α aprēķināšanai tiek dota šķietami vispārīga, bet **ne vienmēr lietojama** formula:

$$! \quad \alpha = \arctg \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad (2)$$

kur Δx un Δy virziena līnijai galapunktu koordinātu starpības, aprēķināmas

$$\Delta x = X_{\text{beigās}} - X_{\text{sākumā}}$$

un tā pat arī

$$\Delta y = Y_{\text{beigās}} - Y_{\text{sākumā}}.$$

Piemēram, virzienam no punta S līdz B aprēķins **varētu** izskatīties šādi:

$$\Delta x_{SB} = X_B - X_S$$

un tā pat arī

$$\Delta y_{SB} = Y_B - Y_S,$$

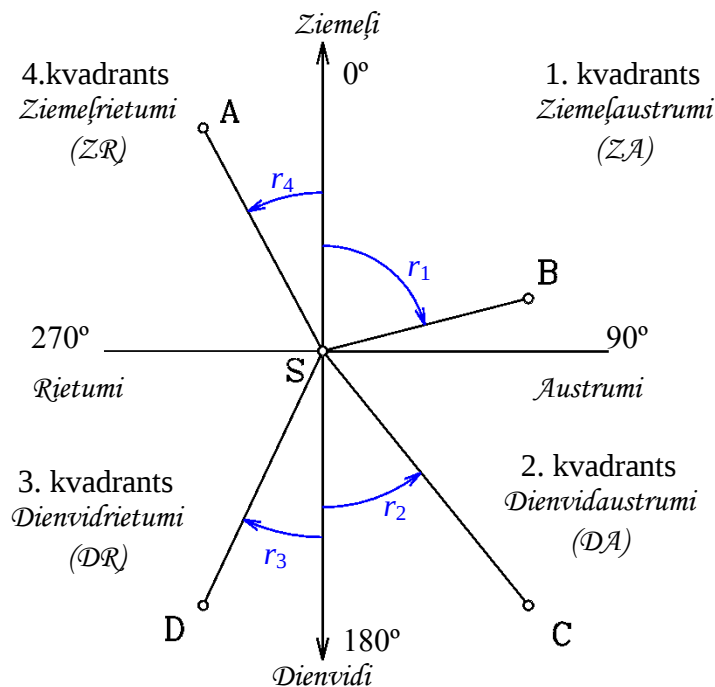
un direkcionalais leņķis $\alpha_{SB} = \arctg \frac{\Delta y_{SB}}{\Delta x_{SB}}.$

Pāveidojot formulu un ievietojot tajā koordinātas,

$$\alpha_{SB} = \arctg \frac{Y_B - Y_S}{X_B - X_S} = \arctg \frac{3.40 - 1.25}{3.21 - 2.66} = \arctg \frac{2.15}{0.55} = \arctg (3.91) = 75.65069^\circ \approx 75.65^\circ.$$



Formula (2) ir jālieto piesardzīgi. Tā nedod rezultātu pilnam apgriezienam no 0° līdz 360° . Pusē no iespējamiem gadījumiem rezultāts būs nepareizs par 180° . Gadījumos, ja α ir tuvu 90° vai 270° , tad formulas (2) risinājums ir arī nedrošs.



6. attēls. Rumbi

Tā kā formula (2) nedarbojas pilnā apgriezienā no 0° līdz 360° , tad risinājums būs jāsadala 4 atsevišķos gadījumos. Vispirms būs jāaprēķina **rumbi**.

Rumbs ir šaurais horizontālais leņķis, kuru skaita no meridiāna tuvākā ziemeļu vai dienvidu virziena (x ass pozitīvā vai negatīvā virziena) līdz dotajam virzienam.

Tā kā rumbi ir tikai no 0° līdz 90° , tad tā skaitliskā vērtība nedod priekšstatu par kvadrantu, kurā atrodas dotais virziens. Tāpēc rumba skaitliskajai vērtībai priekšā pieraksta kvadranta nosakumu atbilstoši debess pusēm: ZA – ziemeļaustrumi, DA – dienvidaustrumi, DR – dienvidrietumi, ZR – ziemeļrietumi. Piemēram, ZA:75.65°

Kvadrants – 1/4 daļa no pilna apgrieziņa.

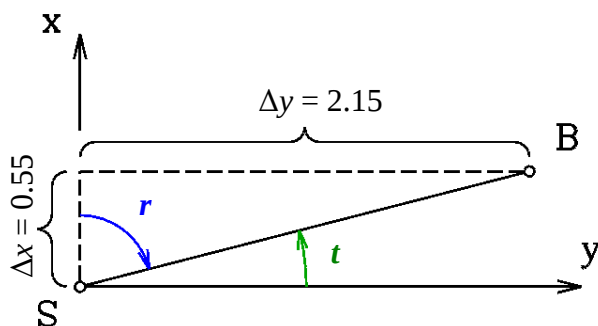
Tāpēc formulu (2) rēķinām pēc moduļa (bez zīmes) un attiecinām uz rumbu

$$r = \arctg \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right|, \quad (3)$$

tikai

arktangensa aprēķins kļūst nedrošs, ja **saucējs** (tas ir Δx) ir **stipri mazāks par skaitītāju** (tas ir Δy), proti – kad r tuvojas 90° .

Lai iegūtu drošu rumba leņķi r rīkojas sekojoši.



7. attēls. Rumba aprēķins

Vispirms pēc moduļa savā starpā salīdzina $|\Delta x|$ ar $|\Delta y|$ un novērtē, kurš no tiem ir lielāks.

Ja $|\Delta x| > |\Delta y|$, tad formulā (3) saucējs būs lielāks, noteikti nebūs dalījums ar mazu skaitli vai nulli, risinājums būs drošs. Rumbu var rēķināt pēc formulas (3).

Ja ir pretēji, ja $|\Delta x| < |\Delta y|$, tad formulā (3) saucējs būs mazāks nekā skaitītājs, vai tuvs nullei, tad risinājums ir nedrošs, bet gadījumā ja $\Delta x = 0$, tad risinājuma nav. Tāpēc formulā (3), apgriežot daļu (smainot vietām skaitītāju ar saucēju) rēķina leņķi (7. attēls)

$$t = \arctg \left| \frac{\Delta x}{\Delta y} \right|,$$

bet rumbu iegūs kā atlikumu no taina leņķa $r = 90^\circ - t$, tātad

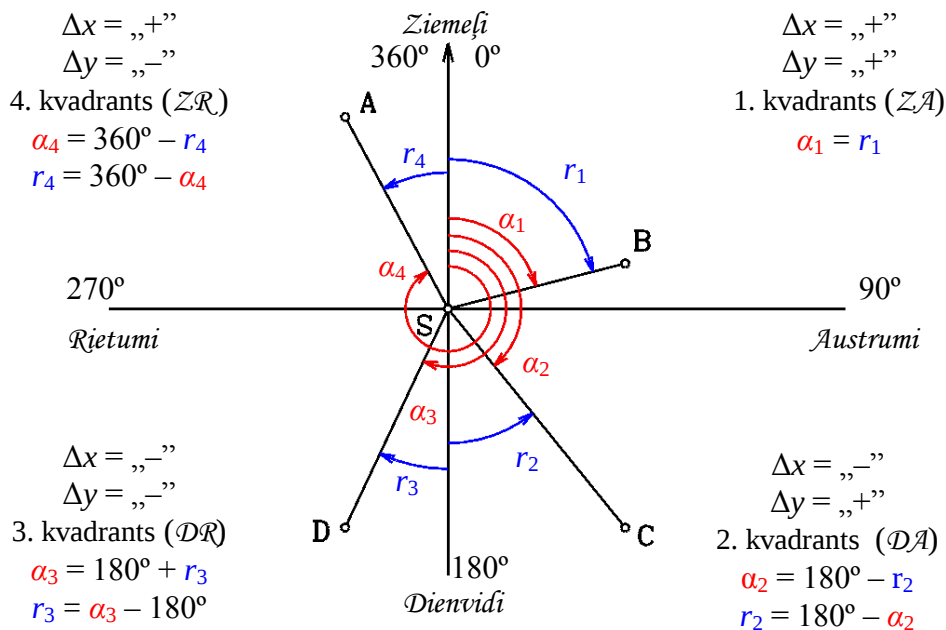
$$r = 90^\circ - \arctg \left| \frac{\Delta x}{\Delta y} \right|. \quad (4)$$

Piemēram, $r = 90^\circ - \arctg \left| \frac{0.55}{2.12} \right| = 90^\circ - \arctg(0.2558) = 90^\circ - 14.3486^\circ = 75.65142^\circ \approx 75.65^\circ$

Kad ir droši aprēķināta rumba skaitliskā vērtība, skatamies 8. attēla stūros, kādas ir zīmes koordinātu starpībām Δx un Δy – pozitīvas vai negatīvas un izvēlamies kvadrantu kurā ir dotais virziens un izvēlamies formulu, ar kuras palīdzību no rumba ietūt direkcionalo leņķi α .

Koordinātu starpību zīmes sakrīt ar koordinātu asu X un Y virzieniem, tāpēc ir **viegli iegaumēt**:

- X ass iet uz ziemeļiem (uz augšu) un koordinātu starpības Δx zīme ziemeļu (8. attēlā abos augšējos kvadrantos) ir pozitīva, bet uz dienvidiem (apakšējos kvadrantos) ir pretēja – negatīva;
- Y ass iet austrumiem (pa labi), tāpēc tur koordinātu starpības Δy zīme būs pozitīva (abi kvadranti labajā pusē, gan augšējais gan apakšējais), bet uz rietumiem (pa kreisi) pretēja – negatīva.



8. attēls. Sakarības starp direkcionalajiem leņķiem un rumbiem

Piemērs un aprēķina secība

Dots: Punktu pāris (divi punkti) S un D ar koordinātām:

$$X_S = 2.66, \quad Y_S = 1.25$$

$$X_D = 0.00; \quad Y_D = 0.00$$

Aprēķināt: Direkcionalo leņķi pirmajā punktā S, skatototies uz otro punktu D.

1. darbība. Aprēķina koordinātu starpības

$$\Delta x = X_{\text{beigās}} - X_{\text{sākumā}}$$

un tā pat arī

$$\Delta y = Y_{\text{beigās}} - Y_{\text{sākumā.}}$$

$$\Delta x = X_D - X_S$$

un

$$\Delta y = Y_D - Y_S.$$

$$\Delta x = 0.00 - 2.66 = -2.66$$

un

$$\Delta y = 0.00 - 1.25 = -1.25.$$

un vispār šīs koordinātu starpības mums jau bija attāluma $|SD|$ aprēķinā (1.formulā) zem kvadrātsaknes pirms kāpināšanas kvadrātā. Ja iepriekš bija veikts detāls pieraksts – varam ņemt no tā.

2. darbība. Salīdzina savā starpā Δx un Δy , neņemot vērā to zīmi un no formulām

$$r = \arctg \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right|, \quad (3)$$

vai

$$r = 90^\circ - \arctg \left| \frac{\Delta x}{\Delta y} \right| \quad (4)$$

izvēlas to, kurai saucējs (zem daļsvītras) būtu lielāks par skaitītāju (virs daļsvītras) neņemot vērā zīmi.

Tā kā $|\Delta x| = 2.66 > 1.25 = |\Delta y|$, tad derēs formula (3)

$$r = \arctg \left| \frac{-1.25}{-2.66} \right| = \arctg(+0.4699) = 25.1700^\circ \approx 25.17^\circ$$

Šo formulu izvēle nav kritiska, ja Δx un Δy ir līdzīgi. Par pietiekoši līdzīgiem tos var uzskatīt, ja tie neatšķiras viens no otra vairāk kā divas reizes, jeb ir robežās apmēram $0.5 < \Delta y/\Delta x < 2$. Tad ir vienāla kuru formulu izmanto: (3), vai (4).

3. darbība. Ievēro 1.darbībā iegūto koordinātu starpību zīmes $\Delta x = „-”$ un $\Delta y = „-”$

4. darbība. Pēc koordinātu starpību zīmēm 8.attēlā atrod kvadrantu un tam atbilstošās sakarības direkcionalā leņķa iegūšanai. Tātad abi koordinātu pieaugumi ir negatīvi trešajā, jeb dienvidrietumu (**DR**) kvadrantā, kurā rumbam var pierakstīt kvadrantu. Rumbs būs **DR:25.17°**.

5. darbība. Kad atrasts kvadrants rumbam, rēķina direkcionalo leņķi tikai šim kvadrantam atbilstošā veidā.

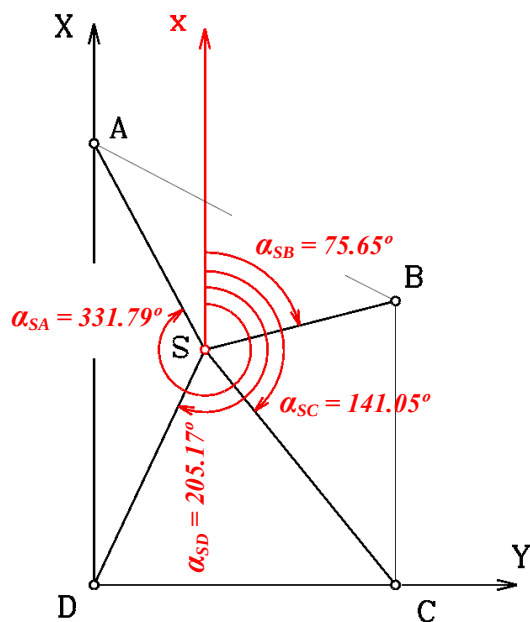
$$\alpha = 180^\circ + r.$$

Tad galīgi virziena (vai līnijas) **DS** direkcionalais lenkis būs

$$\alpha_{SD} = 180^\circ + 25.17^\circ = 205.17^\circ$$

Aprēķinu kopsavikums horizontālā plaknē

Punkts	X	Y	Δx	Δy	attālums		tg	r°		α°
S	2.66	1.25	no S	no S	no S					
A	4.99	0.00	2.33	-1.25	2.64	(3) formula, $\Delta y/\Delta x =$	-0.5365	28.214	ZR	331.786
B	3.21	3.40	0.55	2.15	2.22	(4) formula, $\Delta x/\Delta y =$	0.2558	75.651	ZA	75.651
C	0.00	3.40	-2.66	2.15	3.42	(3) formula, $\Delta y/\Delta x =$	-0.8083	38.949	DA	141.051
D	0.00	0.00	-2.66	-1.25	2.94	(3) formula, $\Delta y/\Delta x =$	0.4699	25.169	DR	205.169



Lai būtu droša pārlicība par aprēķinātajiem direkcionalajiem leņķiem α , tos var apmēram izmērīt plānā vai uz vietas telpā ar transportieri, vai mēģināt novērtēt tīri vizuāli, ja ir pārbaudīts acumērs.

9.attēls. Direkcionalo leņķu vērtības

Piezīme

Ja aprēķinus veic kādā no preprogrammēšanas valodām vai Excel vidē, par virzienu aprēķinu jau ir padomāts. Tad ierastā viena argumenta arktangensa ATAN funkcijas $\alpha = \arctg(y/x)$ vietā, kur y/x ir viens skaitlis, ieteicams lietot divu argumentu funkciju ATAN2. Tai

nepieciešami divi ievadlielumi: atsevišķi x un atsevišķi y . Mūsu gadījumumā pieraksts izskatīsies apmēram šādi:

$$\alpha^{\text{rad}} = \text{ATAN2}(\Delta x; \Delta y).$$

Var būt arī

$$\alpha^{\text{rad}} = \text{ATAN2}(\Delta x, \Delta y) . - \text{komats vai semikols atkarīgs no programmēšanas vides}.$$

Ļoti retos programmēšanas gadījumos var būt pretēji y un x , tātad $\alpha^{\text{rad}} = \text{ATAN2}(\Delta y; \Delta x)$.

Funkcija pati droši aprēķina rumbu un atrod īsto kvadrantu.

Funkcija rezultātu dod radiānos. Tātad, lai leņķi pārveidotu grādos:

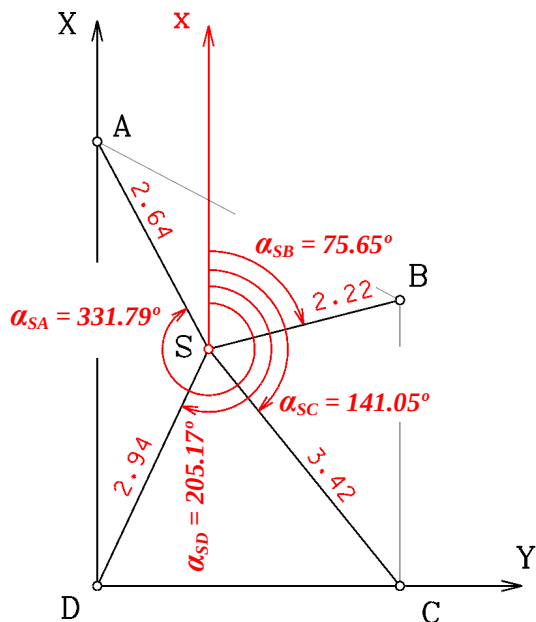
$$\alpha^{\circ} = \alpha^{\text{rad}} \cdot 180^{\circ} / \pi , \quad \text{kur } \pi \text{ ņemam vismaz 4 zīmes aiz komata, tātad } \pi \approx 3.1416,$$

vai arī lietojam speciālu funkciju mērvienību pārveidpšanai no radiāniem uz grādiem. Tad viss kopā galīgi izskatīsies šādi:

$$\alpha^{\circ} = \text{DEGREES}(\text{ATAN2}(\Delta x; \Delta y)).$$

Svarīgi! Šī funkcija aprēķina virzienu pilnan apgriezienam no -180° līdz $+180^{\circ}$, tātad no X koordinātu ass gan pret pulksteni līdz -180° , gan pa pulksteni līdz $+180^{\circ}$. Lai iegūtu kā 5.attēlā, pie negatīvajiem japieskaita 360°

Beidzot aprēķinātās punktu A , B , C un D polāras koordinātas no punktā S var attēlot vienā shēmā, kā 10. attēlā.



10.attēls. Attālumi un direkcionalie leņķi

Ja ir nepieciešams kāds no leņķiem $\sphericalangle BSC$, $\sphericalangle CSD$, $\sphericalangle DSA$ vai $\sphericalangle ASB$, tad to rēķina kā direkcionalo leņķu starpību. Horizontālo leņķi plaknē apzīmē ar grieķu burtu β , bet tam klāt ar indeksiem pieraksta punktu nosaukumus

$$\beta_{BSC} = \sphericalangle BSC = \alpha_{SC} - \alpha_{SB} = 141.05^{\circ} - 75.65^{\circ} = 65.40^{\circ}$$

$$\beta_{CSC} = \sphericalangle CSD = \alpha_{SD} - \alpha_{SC} = 205.17^{\circ} - 141.05^{\circ} = 64.12^{\circ}$$

$$\beta_{DSA} = \sphericalangle DSA = \alpha_{SA} - \alpha_{SD} = 331.79^{\circ} - 205.17^{\circ} = 126.62^{\circ}.$$

Īpašs gadījums ir, kad katrs no virzieniem atrodas dažādās pusēs no 0° virziena. Tad horizontālais leņķis sanāk **negatīvs**. Tādam pieskaita 360° un iegūst pareizu horizontālo leņķi.

$$\beta_{ASB} = \sphericalangle ASB = \alpha_{SB} - \alpha_{CA} = 75.65^{\circ} - 331.79^{\circ} = -256.14^{\circ} + 360^{\circ} = 103.86^{\circ}$$