



Daugavpils būvniecības tehnikums

Artjoms Pučinskis

VIENĀDOJUMU RISINĀŠANA AR SUBSTITŪCIJAS METODI

Metodiskā izstrādne

Daugavpils

2022

ANOTĀCIJA

Vienādojumu risināšana ar substitūcijas metodi

Izstrādnē autors: Artjoms Pučinskis

Izstrādnē apjoms: 21 lpp.

Darba mērķis: Noteikt kādā veidā un cik efektīvi substitūciju metode atvieglo vienādojumu risināšanu.

Izstrādnē tiks pētīts kā substitūciju metode darbojas risinot vienādojumus.

Izstrādnē tiks pētīts un veikti secinājumi par to kā substitūciju metode ir sastopama un nozīmīga skolas kursā. Tiks apkopoti uzdevumi pēc to grūtības pakāpes.

Izstrādnē var tikt izmantots kā metodiskais materiāls gatavojoties eksāmeniem matemātikā, jo mācību kursā ir iekļauti uzdevumi, kuru risinājums satur šo metodi un pasargā no liekām kļūdām risināšanas gaitā un vienkāršo uzdevumus.

Saturs

IEVADS	6
Vienādojumi	9
Secinājumi	20
Izmantotās literatūras un avotu saraksts	22

IEVADS

Metodiskas izstrādes satura apskats

Matemātika ir varena zinātne, kurā nepārtraukti, zinātnieki veic pētījumus un ikkatrs ievērojams prāts var atrast un atklāt sev kādu formulu, metodi, kuru izmantot matemātisko uzdevumu risināšanas atvieglošanai un risināšanai. Vēsturē un arī mūsu sabiedrībā ir bijis daudz varenu prātu, kā rezultātā uzdevumu risināšanas metožu ir sakrājis tik daudz, ka brīdī, kad jārisina piemērs ir sarežģīti izvēlēties vispiemērotāko metodi, lai risinājums būtu īsāks un vieglāks. Lai gan šādu metožu, kuras atvieglo un paātrina algebriskos risinājumus, nav daudz.

Substitūciju metodi plaši izmanto mūsdienu matemātikā: vienādojumos, nevienādībās, vienādojumu un nevienādību sistēmās, kā arī transcendentos vienādojumos (eksponentvienādojumos, logaritmiskos un trigonometriskos vienādojumos). Substitūcija (latīņu v. substituere) – aizstāšana [1]

Izpētot Valsts pārbaudes darbus matemātikā no 2009. gada līdz 2019. gadam, kuri ir pieejami Valsts izglītības satura centra mājas lapā <https://visc.gov.lv/> [16], tika konstatēts, ka regulāri eksāmenos ir uzdevumi, kuros tiek prasīts atrisināt vienādojumus un vienādojumu sistēmas. Gandrīz vienmēr ir vienādojumi, kurus, ņemot vērā ierobežotu laiku, efektīvāk risināt ar substitūcijas metodi. Tādi uzdevumi parādās 2. daļā un par tiem var iegūt 4 – 6 punktus. Tas nozīmē, ka risinot šādā veida uzdevumus nepieciešams iepriekš zināt substitūcijas metodi, un tās izmantošanas principus.

Atrisināt vienādojumu ar substitūciju metodi nozīmē - kādu vienādojuma daļu, kas satur nezināmo, apzīmēt ar jaunu mainīgo [2].

Pirmo reizi substitūciju metode rakstiskos avotos tiek pieminēta tikai 16. gs.

Lai atrisinātu jebkuru vienādojumu trešajā pakāpē, tika atrasti 3 tipu vienādojumu risināšanas metodes:

$$x^3 + px = q; \quad x^3 = px + q; \quad x^3 + q = px,$$

kur p, q ir pozitīvie skaitļi [3].

N. Tartalja bija pirmais, kurš sāka lietot substitūciju metodi vienādojumu risinājumos. Šo metodi zinātnieks izmantoja trešās pakāpes vienādojumu risināšanā.

N. Tartalja pirmo reizi min substitūciju metodi savā traktātā “Jaunā zinātne”.

Darbā tiks pievērsta uzmanība, galvenokārt, augstāk minētā zinātnieka formulām, kas saistītas ar substitūciju metodes izmantošanu vienādojumos un vienādojumu sistēmās.

N. Tartalja piedāvāja sekojošus kubisko vienādojumu risinājumus:

$$x^3 + px = q,$$

ar aizvietošanas $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$ [3] palīdzību Tartalja vienkāršoja risināšanu, pārveidojot vienādojumu par kvadrātvienādojumu

$$u^2 - qu - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.$$

Vienādojuma diskriminants $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3$ ir pozitīvs, tad tām ir viena pozitīva sakne [3].

Lai tiktu atrisināts vienādojums $x^3 - px = q$, tika lietota substitūcija $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$, kā rezultātā tika iegūts vienādojums $u^2 - qu + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$ un diskriminants

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3, \text{ kurš var būt gan pozitīvs, gan negatīvs [3].}$$

Metodiskas izstrādes izmantotās literatūras apskats

Veicot substitūcijas metodes pētījumu un analīzi tika izskatītas vairākas mācību grāmatas, un pārskatīti uzdevumu krājumi, aplūkoti pēdējo 10 gadu Valsts pārbaudes darbi matemātikā un olimpiādes. Analizējot visu pieejamo literatūru un informāciju internet resursos, tika noskaidrots, ka substitūcijas metodei tiek iedalīta svarīga loma, un šīs metodes apraksts bieži parādās, pat kā atsevišķa sadaļa vai apakšdaļa.

Bakalaura darba teorijas apraksts galvenokārt balstās uz rokasgrāmatām [4] un mācību līdzekļiem [12], [13], [15]. Praktiskie uzdevumi patstāvīgai risināšanai, gan uzdevumi ar atrisinājumiem tiek izmantoti no dažādiem uzdevumu krājumiem [6], [8], [9], [10], [11], [14].

B. Siliņas un K. Šteintera rokasgrāmatā matemātikā [4] īsi un kodolīgi ir apkopota visa svarīgākā informācija par matemātikas kursa jautājumiem, kas atbilst inženierzinātņu un dabaszinātņu bakalaura studiju programmām.

V.V. Vavilova, I.I. Meļņikova, S.N. Oļehnika un P.I. Pasičenko uzdevumu krājumā [6] ir apkopoti uzdevumi ar atrisinājumiem par vienādojumiem un nevienādībām.

X. Liagu grāmatas [8] pamatā ir lekciju piezīmes, kuras redaktors pēdējos 15 gados ir izmantojis olimpiāžu apmācībasursos vairākās Singapūras skolās, piemēram, Viktorijas Junioru koledžā, Hwa Chong institūtā, Nanjangas meiteņu vidusskolā un Dunmana vidusskolā. Tās apjoms un dziļums ievērojami pārsniedz parasto mācību programmu un ievieš daudzus mūsdienu matemātikas jēdzienus un metodes.

J.V. Galkina uzdevumu krājums ar atrisinājumiem [9] galvenokārt paredzēts skolēnu sagatavošanai matemātikas olimpiādēm. Grāmata vērsta uz skolēnu patstāvīgu darbu un vielas apgušanu, un apmāca risināt paaugstinātas grūtības līmeņa matemātiskus uzdevumus. Jāatzīmē, ka

šajā grāmatā ir apskatīta trigonometriskās substitūcijas metode, kas ļauj samērā viegli atrisināt dažus divu algebrisko vienādojumu sistēmu veidus. Literatūrā trigonometriskās substitūcijas metode nav pārāk plaši atspoguļota.

V.N. Berjozina, L.J. Berjozinas un I.P. Nikoļskas uzdevumu krājumā [10] ir apkopoti uzdevumi no skolas kursa, kuru risināšanai jāpielieto nestandarta paņēmieni. Grāmata paredzēta matemātikas fakultātiem un ārpus mācību stundu nodarbībām.

E.N. Balajana mācību līdzeklī [11] tiek apskatītas matemātisko olimpiāžu uzdevumu risināšanas metodes, kā arī 700 autora izveidoti uzdevumi. Grāmatā aplūkotie uzdevumi būs interesanti ne tikai skolēniem un studentiem, bet arī skolotājiem.

D. Kriķa un K. Šteintera grāmatas [12], [15] ir teorētiska un praktiska informācija par lgebras kursu 10. – 12. klasēs. Katrā daļā tiek aplūkotas atšķirīgas tēmas, un viss materiāls ir sadalīts arī pa grūtības līmeņiem. Tas ļauj katram patstāvīgi izvērtēt savas spējas, un izlemt kādas tēmas ir nepieciešams apgūt padziļināti.

V. Ziobrovskā un B. Siliņas, mācību grāmata [13] adresēta vidusskolēniem un profesionālo mācību iestāžu audzēkņiem. Grāmatā ir daudz algebras teorētiskā materiāla, bet nav vingrinājumu un uzdevumu tās nostiprināšanai.

D. Kriķa, P. Zariņa un V. Ziobrovskā uzdevumu krājums ir svarīgs atbalsts katrai mācību grāmatai, jo satur sevī lielu daudzumu uzdevumu, kuri atklāj jebkuru tēmu matemātikā no jauna skatu punkta. Grāmatas uzdevumu daudzveidība un grūtības līmeņi veicina radošu pieeju uzdevumu risināšanas procesā.

Katrā nodaļā piemēru un uzdevumu numerācija ir neatkarīga. Katram piemēram vai uzdevumam norādīti secības numurs un iekavās –uzdevuma avots. Bez tam ievesti papildus apzīmējumi:

- A - piemērs ņemts no literatūras ar atrisinājumu,
- B - piemērs ņemts no literatūras bez atrisinājuma
- C - piemērs sastādīts patstāvīgi.

Vienādojumi

Vienādību veido divas matemātiskas izteiksmes, kuras savienotas ar vienādības zīmi. Gluži kā izteiksmes, arī vienādības var saturēt tikai skaitļus (skaitliskas vienādības) vai skaitļus un mainīgus lielumus [4].

Ir patiesas un aplamas skaitliskās vienādības. Patiesas vienādības ir tikai tad, ja izteiksmju vērtības abās vienādības zīmes pusēs ir vienādas, pretējā gadījumā tā ir aplama skaitliskā vienādība.

Vienādība ar mainīgu lielumu ir patiesa vai aplama atkarībā no mainīgā vērtības.

Ja vienādība satur vienu nezināmo (mainīgo) un ir jāatrod visas tās nezināmā vērtības, kurām vienādība ir patiesa, tad saka, ka dotā vienādība ir vienādojums ar vienu nezināmo [4].

Vispārējā gadījumā vienādojums ar vienu nezināmo x ir

$$f(x) = g(x), \quad (1)$$

kur $f(x)$ un $g(x)$ ir kādas funkcijas. Funkciju $f(x)$ sauc par vienādojuma (1) kreiso pusi, bet $g(x)$ par labo pusi.

Par vienādojuma definīcijas (D.A.) apgabalu sauc visu to mainīgā vērtību kopu, ar kurām ir apzīmētas vienādojuma abas puses. Jebkuru skaitli x no vienādojuma D.A. sauc par pieļaujamo dotajam vienādojumam. Skaitli a no vienādojuma D.A. sauc par vienādojuma (1) atrisinājumu vai sakni, ja, ievietojot vienādojumā nezināmā vietā šo skaitli, iegūst skaitliski patiesu vienādību $f(a) = g(a)$. Atrisināt vienādojumu (1) nozīmē atrast visas tā saknes vai pierādīt, ka vienādojumam sakņu nav. Vienādojuma sakņu (atrisinājumu) kopa var būt tukša divos gadījumos:

- 1) ja vienādojuma (1) D.A. ir tukša kopa;
- 2) ja vienādojuma (1) D.A. ir netukša kopa M , bet ne vienam skaitlim $a \in M$ neizpildās skaitliskā vienādība $f(a) = g(a)$.

Ja vienādojuma (1) visu sakņu kopa ir tukša, tad saka, ka vienādojumam nav sakņu. Ja vienādojuma (1) visu sakņu kopa ir viens skaitlis x , tad saka, ka vienādojumam ir vienīgā sakne x [4].

Lai vienkāršotu vienādojumu risināšanu, visnoderīgāk ir lietot substitūciju metodi: vienādojuma daļu, kas ietver nezināmo, aizvieto ar kādu citu mainīgo (substitūciju, palīgnezināmo). Palīgnezināmo ir ieteicams izvēlēties tādu, lai risinājuma iznākumā iegūtu pēc iespējas vienkāršāku vienādojumu.

Pēc jaunā vienādojuma atrisināšanas, vienmēr atgriežas pie substitūcijas un aprēķina dotā vienādojuma saknes.

Vienādojumu mēdz reducēt par kvadrātvienādojumu:

$$y^2 + 2y - 15 = 0$$

$$x^4 + 2x^2 - 15 = 0 \text{ (substitūcija } x^2 = y),$$

$$(2x+1)^2 + 2(2x+1) - 15 = 0 \text{ (substitūcija } 2x+1 = y),$$

$$\log_5^2 x + 2\log_5 x - 15 = 0 \text{ (substitūcija } \log_5 x = y),$$

$$2^2 x + 2 \cdot 2x - 15 = 0 \text{ (substitūcija } 2x = y),$$

$$\sin^2 x + 2 \sin x - 15 = 0 \text{ (substitūcija } \sin x = y) [5].$$

1. piemērs. (C)

Atrisināt vienādojumu:

$$\frac{x-1}{x} - \frac{3x}{2x-2} = \frac{5}{2}. \quad (1)$$

Atrisinājums:

$$D. A. \quad x \neq 0,$$

$$x \neq 1.$$

Pārveidojot vienādojumā (1) kreiso pusi, tiek iegūts

$$\frac{x-1}{x} - \frac{3x}{2(x-1)} + \frac{5}{2} = 0. \quad (2)$$

Apzīmējot $\frac{x}{x-1} = t$, tad vienādojums (2) tiek pārveidots

$$\frac{1}{t} - \frac{3t}{2} + \frac{5}{2} = 0. \quad (3)$$

Pareizinot vienādojuma (3) abas puses ar $-2t$, tiek iegūts

$$3t^2 - 5t - 2 = 0. \quad (4)$$

Tiek atrastas vienādojumā (4) saknes

$$D = 25 + 24 = 49,$$

$$t_1 = \frac{5-7}{6} = \frac{1}{3},$$

$$t_2 = \frac{5+7}{6} = 2.$$

$$1) \text{ Ja } t_1 = \frac{1}{3}, \text{ tad}$$

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{3}, \text{ kuru var pārveidot sekojošā veidā } -3x = x - 1.$$

Pārnesot zināmos labajā pusē un nezināmos kreisajā, tiek iegūts $4x = 1$, tad

$$x_1 = \frac{1}{4} \in D. A.$$

$$2) \text{ Ja } t_2 = 2, \text{ tad } \frac{x}{x-1} = 2, \text{ kuru var pārveidot sekojošā veidā } 2x - 2 = x, \text{ tad}$$

$$x_2 = 2 \in D. A.$$

Atbilde. $x \in \left\{ \frac{1}{4}; 2 \right\}$.

Šīs metodes īpatnība ir tāda, ka jāievēro, lai vienādojuma risināšanas rezultātā pēc substitūcijas metodes, sakņu skaits paliek nemainīgs, to nedrīkst kļūt ne vairāk ne mazāk.

Bieži vien vienādojumu aizvieto ar tā sekām, vispār - neekvivalentām; pie tam, visas pirmā vienādojuma saknes ir saknes arī otram, tas nozīmē, ka nenotiek sakņu zaudējums, bet ir gadījumi, kad liekas saknes var parādīties (bet var arī neparādīties). Gadījumā, kad kaut vienu reizi vienādojuma pārveidojumu gaitā vienādojumu aizvietoja ar tā sekām, ir obligāta iegūto sakņu izpēte. Tā nav tikai papildus skaitļošanas kontrole, bet konkrētā vienādojuma atrisinājuma daļa.

Aizstāt vienādojumu ar citu vienādojumu, kurš nav šā vienādojuma seka, nedrīkst, jo šādā gadījumā ir pirmā vienādojuma sakne, kura nav sakne otram, un tad, atrisinot otro vienādojumu, vienāda netiks atrastas visas pirmā vienādojuma saknes, kā rezultātā notiks sakņu zaudējums, kas nav labojams. Šajā situācijā ir atšķirība starp sakņu zaudējumu un lieko sakņu ieguvu.

Praksē ir nepieciešamība labi zināt konkrētus sakņu zaudējuma un ieguves avotus. Pamatā šie avoti var būt divu veidu:

- 1) tā saucamie “identiskie pārveidojumi”;
- 2) vienādojuma abu daļu funkcionēšana (kāpināšana, logaritmēšana, potencēšana u.c.)(atsauci).

No pirmā skatiena identiskie pārveidojumi ir pavisam nevainīgi, patiesībā tos izmantojot var nonākt pie neekvivalentiem vienādojumiem, jo tie izmaina D.A. Piemēram, aizvietojo iracionālā vienādojumā $(\sqrt{5x+2})^2$ risināšanas gaitā pret $5x+2$, tiek paplašināts D.A., jo izteiksmei $5x+2$ ir jēga pie visām x vērtībām, bet $(\sqrt{5x+2})^2$ tikai pie $x \geq -\frac{2}{5}$. Vai, ja logaritmiskajā vienādojumā logaritmu summa tiek aizvietota ar reizinājuma logaritmu, tad arī šajā gadījumā ir iespējams iegūt D.A. paplašināšanu un, kā rezultātā, saņemt liekas saknes. Liekas saknes ir iespējam iegūt arī gadījumā, ja tiks kāpināts vienādojums otrajā (pāra) pakāpē.

Tas tiek skaidrots ar to, ka vairākas formulas, kuras tiek izmantotas izteiksmju pārveidojumiem, ir tādas, ka to kreisajai un labajai pusei ir jēga pie dažādām burtu vērtībām. Piemēram,

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y,$$

$$a^{\log_a b} = b,$$

$$\operatorname{ctgx} = \frac{1}{\operatorname{tgx}}.$$

Sakarā ar to, formālā vienas formulas puses aizvietošana ar otru noved pie D.A.

paplašināšanas. Tādēļ ir iespējama lieko sakņu ieguve, bet D.A. sašaurināšanas dēļ - sakņu zaudēšana, šī iemesla dēļ D.A. sašaurināšana ir nepieļaujama. Sakarā ar to, vienādojuma pārveidošanas procesā lieko sakņu parādīšanās ir iespējama tikai uz D.A. paplašināšanas rēķina, šādā gadījumā dotā vienādojuma saknes būs tikai tās, kuras ietilpst iepriekš minētā vienādojuma D.A. Tādēļ, iegūto sakņu pārbaudīšanas vietā var pārbaudīt vai iegūtās saknes ietilpst D.A., bet šī darbība var tikt izpildīta tikai gadījumā, ja lieko sakņu iegūšanas avots ir viens no D.A. paplašinājumiem.

2. piemērs. (C).

Atrisināt vienādojumu:

$$x^2 - x - 6 = \frac{8}{x - x^2}. \quad (1)$$

Atrisinājums:

$$D. A. \quad x^2 - x \neq 0,$$

$$x \neq 1.$$

Pārveidojot vienādojumā (1) labo pusi un pārnēsot zināmos labajā pusē un nezināmos kreisajā, tiks iegūts

$$x^2 - x + \frac{8}{x^2 - x} = 6. \quad (2)$$

Apzīmējot $x^2 - x = y$, tad vienādojums (2) tiek pārveidots

$$y + \frac{8}{y} = 6. \quad (3)$$

Pareizinot vienādojuma (3) abas puses ar y , tiek iegūts

$$y^2 + 8 = 6y. \quad (4)$$

Pārnēsot visu uz kreiso pusi, tiek iegūts

$$y^2 - 6y + 8 = 0. \quad (5)$$

Tiek atrastas vienādojuma (5) saknes

$$y_1 = 2, \quad y_2 = 4.$$

1) Ja $y_1 = 2$, tad

$$x^2 - x - 2 = 0. \quad (a)$$

Tiek atrastas iegūtā vienādojuma (a) saknes

$$x_1 = -1 \in D.A.$$

$$x_2 = 2 \in D.A.$$

2) Ja $y_2 = 4$, tad

$$x^2 - x - 4 = 0. \quad (b)$$

Tiek atrastas iegūtā vienādojuma (b) saknes

$$D=1+16=17,$$

$$x_3 = \frac{1-\sqrt{17}}{2} \in D.A.; \quad x_4 = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \in D.A.$$

$$\text{Atbilde. } x \in \left\{ -1; 2; \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \right\}.$$

Visbiežāk pieļautā kļūda risinot vienādību ir atrast saknes, pārejot no vienādojuma pie tā sekām. Kam seko atrasto sakņu pārbaude, vai tās ietilpst konkrētā vienādojuma D.A. Saknes, kuras neietilpst vienādojuma PVK tiek atmetas un tās, kuras ietilpst PVK tiek ierakstītas atbildē. Šādas darbības arī rada kļūdu. Nav pieļaujams, ka risinājuma pārbaude tiek veikta tikai pārbaudot vai atrastās saknes ietilpst D.A. Ja pastāv varbūtība, ka liekās saknes ir iegūtas tikai uz D.A. paplašinājuma rēķina, ir jāveic pārbaude, vai seku saknes, kuras ietilpst konkrētā vienādojuma D.A., apmierina pašu vienādojumu.

To var pierādīt ar sekojošu piemēru:

3. piemērs. (A, [6]).

Atrisināt vienādojumu:

$$\sqrt{x+11} = x-1. \quad (1)$$

$$D.A. \quad x \geq -11.$$

Ievērojot, ka $\sqrt{x+11}^2 = (x-1)^2$, tiks iegūts

$$x+11 = x^2 - 2x + 1 \quad (2)$$

Pārnesot visu uz kreiso pusi, tiks iegūts

$$x^2 - 3x - 10 = 0. \quad (3)$$

Tiek atrastas vienādojumā (3) saknes

$$\begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = -2. \end{cases}$$

Vienādojuma (1) atrisinājumi, ir skaitļu $x_1 = 5$ un $x_2 = -2$ vidū. Ir jāveic pārbaudi, lai uzzusinātu, vai abas saknes apmierina D.A., skaitlis 5 apmierina vienādojumu (1), skaitlis -2 neapmierina to. No tā izriet, ka vienādojumam (1) ir tikai sakne $x = 5$.

Tālāk tiks apskatīti vēl vienādojumu risināšanas piemēri ar substitūcijas metodi.

4. piemērs. (C).

Atrisināt vienādojumu:

$$(x+3)^2 (x-2) (x+8) = -144. \quad (1)$$

Atrisinājums:

$D.A. \in R$,

Pārveidojot vienādojumā (1) kreiso, un pārnesot visu kreisajā pusē tiek iegūts

$$(x^2+6x+9)(x^2+6x-16)+144=0. \quad (2)$$

Apzīmējot $x^2+6x=y$, tad vienādojums (2) tiek pārveidots

$$(y+9)(y-16)+144=0. \quad (3)$$

Pārveidojot vienādojumā (3) kreiso pusi, tiek iegūts

$$y^2-7y=0. \quad (4)$$

Tiek atrastas vienādojuma (4) saknes

$$y_1=0; y_2=7.$$

1) Ja $y_1=2$, tad

$$x^2+6x=0. \quad (a)$$

Tiek atrastas iegūtā vienādojuma (a) saknes

$$x_1=0 \in D.A.$$

$$x_2=6 \in D.A.$$

2) Ja $y_2=7$, tad

$$x^2+6x=7. \quad (b)$$

Tiek atrastas iegūtā vienādojuma (b) saknes

$$x_3=-7 \in D.A.$$

$$x_4=1 \in D.A.$$

Atbilde. $x \in \{-7; 0; 1; 6\}$.

Ir gadījumi, kad otrādi, aizvieto mainīgos ar izteiksmēm, bet neskatoties uz to, tas vienkāršo risināšanas procesu.

5. piemērs. (A,[\[11\]](#)).

Atrisināt vienādojumu:

$$x^3+x+3\sqrt{2}=0. \quad (1)$$

Atrisinājums:

Apzīmējot $x=y\sqrt{2}$, tad vienādojums (1) tiek pārveidots

$$2y^3+y+3=0. \quad (2)$$

Sadalot vienādojuma (2) kreiso pusi reizinātājos

$$(y+1)(2y^2-2y+3)=0. \quad (3)$$

Tiek atrastas vienādojuma (3) saknes

$$y=-1.$$

$$\text{Ja } y=-1, \text{ tad } x=-\sqrt{2}.$$

Atbilde: $x \in \{-\sqrt{2}\}$.

Ir gadījumi, kad substitūciju metode tiek izmantota vairākas reizes, risinot vienu vienādojumu.

6. piemērs. (A, [10]).

Atrisināt vienādojumu:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} = 0. \quad (1)$$

Atrisinājums:

Apzīmējot $x+2=y$, tad vienādojums (1) tiek pārveidots

$$\frac{1}{y-2} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{y+2} = 0.$$

Lai risinājums nonāktu pie kvadrātvienādojuma atrisināšanas, tiek apzīmēts $y = \frac{1}{t}$, tiek iegūts

$$\frac{1}{\frac{1}{t}-2} + \frac{1}{\frac{1}{t}-1} + t + \frac{1}{\frac{1}{t}+2} + \frac{1}{\frac{1}{t}+1} = 0.$$

Tā kā, $t \neq 0$, tad iegūstam vienādojumu

$$\frac{1}{1-2t} + \frac{1}{1+2t} + 1 + \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} = 0. \quad (2)$$

Šo vienādojumu (2) vieglāk pārveidojot par kvadrātvienādojumu, tiek iegūts

$$\frac{2}{1-4t^2} + \frac{2}{1-t^2} + 1 = 0 \text{ vai } \frac{2}{1-4t^2} + \frac{8}{3+(1-4t^2)} + 1 = 0. \quad (3)$$

Apzīmējot $1 - 4t^2 = u$, tad vienādojums (3) tiek pārveidots

$$\frac{2}{u} + \frac{8}{3+u} + 1 = 0. \quad (4)$$

Sekojoši pārveidojot vienādojumu (4) par kvadrātvienādojumu

$$u^2 + 13u + 6 = 0. \quad (5)$$

Tiek atrastas iegūtā vienādojuma (5) saknes

$$u_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{145}}{2}.$$

1) Ja $u_1 = \frac{-13 + \sqrt{145}}{2}$, tad

$$t^2 = \frac{15 + \sqrt{145}}{8}. \quad (a)$$

Tiek atrastas iegūtā vienādojuma (a) saknes

$$t_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15 + \sqrt{145}}{2}}, t_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{15 + \sqrt{145}}{2}}.$$

2) Ja $u_2 = \frac{-13 - \sqrt{145}}{2}$, tad

$$t^2 = \frac{15 - \sqrt{145}}{8}. \quad (b)$$

Tiek atrastas iegūtā vienādojuma (b) saknes

$$t_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{2}}, t_4 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{2}}.$$

Analoģiski tiek iegūtas y vērtības.

$$y_1 = \sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}}, y_2 = -\sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}}, y_3 = \sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}}, y_4 = -\sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}}$$

Tad analoģiski x vērtības

$$x_1 = \sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}} - 2, x_2 = -\sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}} - 2, x_3 = \sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}} - 2, x_4 = -\sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}} - 2.$$

$$\text{Atbilde: } x \in \left\{ \sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}} - 2, -\sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}} - 2, \sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}} - 2, -\sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}} - 2 \right\}.$$

Lai parādītu substitūcijas metodes efektivitāti, tiks salīdzināts, kā tiek risināts atgriezeniskais vienādojums, izmantojot dažādas metodes.

Piemērām, risinot šāda veida uzdevumu.

7. piemērs. (B,[12]).

Atrisināt vienādojumu:

$$6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0. \quad (1)$$

a) Atrisinājums.

Pirmkārt, dotais vienādojums tiks risināts, pazeminot vienādojuma pakāpi, izmantojot Hornera shēmu [12]:

Atradīsim brīvā locekļa dalītājus: $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$.

Pārbaudīsim, vai dalītāji ir vienādojuma (1) saknes

Ja $x=1$, tad $6 + 5 - 38 + 5 + 6 \neq 0$.

Ja $x=-1$, tad $-6 - 5 + 38 - 5 - 6 \neq 0$.

Ja $x=2$, tad $6 \cdot 16 + 5 \cdot 8 - 38 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 6 = 0$, un $x_1=2$.

Ja $x=-2$, tad $6 \cdot 16 + 5 \cdot (-8) - 38 \cdot 4 + 5 \cdot (-2) + 6 \neq 0$.

Ja $x=3$, tad $6 \cdot 81 + 5 \cdot 27 - 38 \cdot 9 + 5 \cdot 3 + 6 \neq 0$.

Ja $x=-3$, tad $6 \cdot 81 - 5 \cdot 27 - 38 \cdot 9 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$, un $x_2=-3$.

Pēc Hornera shēmas:

	6	5	-38	5	6
2	6	17	-4	-3	0
-3	6	-1	-1	0	



$$6x^2 - x - 1 = 0 \quad (2)$$

Tiks atrastas vienādojumā (2) saknes

$$D = 1 + 25 = 26,$$

$$x_3 = \frac{1+5}{12}, \text{ tad } x_3 = \frac{1}{2}.$$

$$x_4 = \frac{1-5}{12}, \text{ tad } x_4 = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Atbilde: } x \in \left\{ -3; -\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 2 \right\}.$$

b) Atrisinājums.

Otrkārt, šis pats uzdevums tiks risināts ar substitūcijas metodi

Dotā vienādojuma (1) abas puses tiek dalītas ar $x^2 \neq 0$, tiek iegūts

$$6x^2 + 5x - 38 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0. \quad (3)$$

Pārveidojot vienādojumu (3), tiek iegūts

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0. \quad (4)$$

Apzīmējot $x + \frac{1}{x} = t$ un $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$, tad vienādojums (4) iegūst veidu

$$6(t^2 - 2) + 5t - 38 = 0. \quad (5)$$

Pārveidojot vienādojumu (5), tiek iegūts

$$6t^2 + 5t - 50 = 0. \quad (6)$$

Tiek atrastas iegūtā vienādojuma (6) saknes

$$D = 5^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-50) = 1225,$$

$$t_1 = \frac{-5+35}{12} = -\frac{10}{3},$$

$$t_2 = \frac{-5-35}{12} = -\frac{5}{2}.$$

$$1) \text{ Ja } t_1 = -\frac{10}{3}, \text{ tad } x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3}. \quad (a)$$

Reizinot vienādojuma (a) abas puses ar $3x$, tiek iegūts

$$3x^2 + 3 = -10x \text{ vai } 3x^2 + 10x + 3 = 0. \quad (b)$$

Tiek atrastas iegūtā vienādojuma (b) saknes

$$D = 100 - 36 = 64,$$

$$x_1 = \frac{-10-8}{6} = -3 \text{ un } x_2 = \frac{-10+8}{6} = -\frac{1}{3}.$$

$$2) \text{ Ja } t_2 = -\frac{5}{2}, \text{ tad } x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}. \quad (c)$$

Reizinot vienādojuma (c) abas puses ar $2x$, tiek iegūts

$$2x^2 + 2 = -5x \text{ vai } 2x^2 + 5x + 2 = 0. \quad (d)$$

Tiek atrastas iegūtā vienādojuma (d) saknes

$$D = 25 - 16 = 9,$$

$$x_3 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \text{ un } x_4 = \frac{5+3}{4} = 2.$$

$$\text{Atbilde. } x \in \left\{-3; -\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 2\right\}.$$

Kā redzams, substitūcijas metode padara uzdevuma risināšanu ātrāku, vieglāku un efektīvāku.

Tālāk tiks aplūkots piemērs, kuru nav iespējams atrisināt bez substitūcijas metodes.

8. piemērs. (C).

Atrisināt vienādojumu:

$$\left(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right)^x - 10 = 0. \quad (1)$$

Atrisinājums:

Ir gadījumi, kad substitūcijas metodes pielietošana nav redzama, tādēļ ir nepieciešams papildus pārveidot vienādojumu (1)

$$(5 + 2\sqrt{6})^{\frac{x}{2}} + \left(\frac{1}{5+2\sqrt{6}}\right)^{\frac{x}{2}} - 10 = 0. \quad (2)$$

Apzīmējot $(5 + 2\sqrt{6})^{\frac{x}{2}} = t > 0$, tad vienādojums (2) iegūst veidu

$$t + \frac{1}{t} - 10 = 0. \quad (3)$$

Reizinot vienādojuma (c) abas puses ar $t \neq 0$, tiek iegūts

$$t^2 - 10t + 1 = 0. \quad (4)$$

Tiek atrastas iegūtā vienādojuma (4) saknes

$$t_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{6}.$$

$$1) \text{ Ja } t_1 = 5 + 2\sqrt{6}, \text{ tad } (5 + 2\sqrt{6})^{\frac{x}{2}} = 5 + 2\sqrt{6}. \quad (5)$$

Tiek atrastas iegūtā vienādojuma (5) saknes

$$\frac{x}{2} = 1, \text{ un } x_1 = 2.$$

$$2) \text{ Ja } t_2 = 5 - 2\sqrt{6}, \text{ tad } (5 + 2\sqrt{6})^{\frac{x}{2}} = 5 - 2\sqrt{6}. \quad (6)$$

Tiek atrastas iegūtā vienādojuma (6) saknes

$$\frac{x}{2} = -1, \text{ un } x_2 = -2.$$

$$\text{Atbilde: } x \in \{-2, 2\}.$$

Ir lietderīgi šajā situācijā atcerēties pazīstamā matemātiķa, Vilhelma Gotfrīda Leibnīca vārdus: „Risinājuma metode ir veiksmīga, ja jau pašā sākumā mēs spējam paredzēt un turpmāk pierādīt, ka, sekojot šai metodei, sasniegsim mērķi”.

Mēs redzam, ka piemērs ir sarežģīts, bet substitūciju metode to pārveido vienkāršā algebriskā pamatvienādojumā.

Secinājumi

Šajā darbā tika aplūkoti vienādojumi. Pētot substitūcijas metodi algebriskajos uzdevumos, tika konstatēts, ka sarežģītus vienādojumus ir iespējams pārvērst par kvadrātvienādojumiem, kā rezultātā uzdevuma risinājuma gaita tiek vienkāršota un atvieglota.

Pētījuma rezultātā tika pierādīts, ka substitūcijas metode darbojas visos šāda veida uzdevumos un atvieglo to risināšanu.

Tika izkristalizēts, ka dažkārt aizvietojamais elements ir grūti saskatīt, un šādos gadījumos ir nepieciešams veikt algebriskus pārveidojumus, lai aizvietojamie elementi kļūtu ērti saskatāmi.

Tika pamanīts, ka ir piemēri, kurus bez substitūcijas metodes pielietojuma nav iespējams atrisināt. Šāda veida piemēru risinājums tiek apskatīts šajā darbā.

Autora sagatavoto pētījumu un materiālus varēs izmantot cilvēki, kuri gatavojas vidusskolas eksāmeniem un apskatītie risinājumu piemēri var atvieglot mācības visā algebras skolas kursā.

Šajā izstrādņē tika apskatīti tikai uzdevumi, kas tiek izmantoti matemātikas kursā, bet substitūcijas metode ir populāra arī augstākajā un lietišķajā matemātikā, kas paredz iespēju šo pētījumu turpināt.

Izmantotās literatūras un avotu saraksts

1. <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%83%D0%B1%D1%81%D1%82%D0%B8%D1%82%D1%83%D1%86%D0%B8%D1%8F> (skatīts 23.02.2022.).
2. <https://lv.wikipedia.org/wiki/Substit%C5%ABcija> (skatīts 23.02.2022.).
3. <http://elib.bsu.by/bitstream/123456789/94779/1/Cardano.pdf> (skatīts 21.05.2022.).
4. B. Siliņa, K. Šteiners. Rokasgrāmata matemātikā, Rīga, Zvaigzne ABC, 2006.
5. <https://www.uzdevumi.lv/p/matematika/12-klase/vienadojumi-un-nevienadibas-ar-vienu-mainigo-2033/vienadojumi-substitucijas-metode-13320/re-f28a6b97-2dad-490c-82da-9586ae03f2db> (skatīts 23.02.2022.).
6. В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.Н. Олехник, П.И. Пасиченко. Задачи по математике. Уравнения и неравенства, Москва, Наука, 1987.
7. <https://youclever.org/book/odnorodnye-uravneniya-1>. (skatīts 23.02.2022.).
8. Хю Jiagu. Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses, Vol. 6, Singapore, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2010.
9. Е.В. Галкин. Нестандартные задачи по математике. Алгебра, Челябинск, Взгляд, 2004.
10. В.Н. Березин, Л.Ю. Березина, И.П. Никольская. Сборник задач для факультативных и внеклассных занятий по матике, Москва, Просвещение, 1985.
11. Э.Н. Балаян. 1001 Олимпиадная и занимательная задачи по математике, 3-е издание, Ростов-на-Дону, Феникс, 2008.
12. D. Kriķis, K. Šteiners. Algebra 10. – 12. Klasei, 1. daļa, Rīga, Zvaigzne ABC, 1998.
13. V. Ziobrovskis, B. Siliņa. Algebra vidusskolai 2. daļa, Rīga, Zvaigzne ABC, 2001.
14. D. Kriķis, P. Zariņš, V. Ziobrovskis. Diferencēti uzdevumi matemātikā, Rīga, Zvaigzne ABC, 1996.
15. D. Kriķis, K. Šteiners. Algebra 10.-12. klasei, 4. daļa, Rīga, Zvaigzne ABC, 1998.
16. <https://visc.gov.lv/> (skatīts 23.02.2022.).
17. <https://mathworld.wolfram.com/TrigonometryAnglesPi8.html> (skatīts 23.02.2022.).